

Corrigé

RAPPEL : (Définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle) Soit f une application continue par morceaux de I dans E ; espace vectoriel de dimension finie n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Posons :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i.$$

Les f_i sont donc des applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. Alors, si a et b sont deux éléments de I , le vecteur :

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$$

ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie, on le note $\int_a^b f(t) dt$.

Partie I

Quelques propriétés de l'exponentielle de matrices

1. (a) La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente, car $\frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ et la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est complet, en tant qu'espace vectoriel normé de dimension finie, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est convergente.
- (b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(A) = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$ la suite de sommes partielles associée à la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$. Par l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$\|S_n(A)\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Par passage à la limite et par continuité de l'application norme $\|\cdot\|$, on obtient $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $BS_n(A) = \sum_{k=0}^n \frac{BA^k}{k!}$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{BA^k}{k!}$ existe car $\frac{\|BA^k\|}{k!} \leq \frac{\|B\|\|A\|^k}{k!}$, donc par passage à la limite et par continuité de l'application produit $(A, B) \mapsto AB$ (bilinéaire en dimension finie), on obtient l'égalité :

$$B \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k}{k!}.$$

Si A_1 et A_2 sont semblables, alors il existe une matrice P inversible telle que $A_2 = PA_1P^{-1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n(A_2) = PS_n(A_1)P^{-1}.$$

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant continue (linéaire en dimension finie), donc par passage à la limite on obtient :

$$\exp(A_2) = P \exp(A_1) P^{-1}.$$

Donc les deux matrices $\exp(A_1)$ et $\exp(A_2)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{D^n}{n!} = \text{diag}\left(\frac{1}{n!}, \frac{2^n}{n!}, \frac{3^n}{n!}\right)$, donc $\exp(D) = \text{diag}(e, e^2, e^3)$.

On a $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F^3 = 0$. Donc

$$\exp(F) = I + F + \frac{F^2}{2!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice E étant diagonalisable, car elle admet trois valeurs propres distinctes 1, 2 et 3. Des vecteurs propres associés sont respectivement $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 2, 2)$. Donc on a l'égalité :

$$E = PDP^{-1}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d'où

$$\exp(E) = P \exp(D) P^{-1} = P \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e & e^3 - e & \frac{e^3}{2} - e^2 + \frac{e}{2} \\ 0 & e^2 & e^3 - e^2 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

On remarque $\exp(E) = \exp(D + F) \neq \exp(D) \exp(F)$, en effet les matrices D et F ne commutent pas.

3. (a) Posons $l(x) = xA$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f_A = \exp \circ l$, c'est une application continue comme composée de deux applications continues.

- (b) La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!} A^k$ converge normalement sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ ($a > 0$) puisque

$$\forall x \in [-a, a], \left\| \frac{x^k}{k!} A^k \right\| \leq \frac{(a \|A\|)^k}{k!}$$

et la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a \|A\|)^k}{k!}$ converge, donc on peut intégrer terme à terme :

$$\forall x > 0, \int_0^x f_A(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^k}{k!} A^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} A^k.$$

D'où $f_A(x) = I_n + A \int_0^x f_A(t) dt$, ceci montre que f_A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_A(x) = A f_A(x)$.

Par récurrence on montre que f_A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_A^{(n)}(x) = A^n f_A(x)$.

4. (a) On peut montrer par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}, C_\theta^{2p} = \begin{pmatrix} (-1)^p \theta^{2p} & 0 \\ 0 & (-1)^p \theta^{2p} \end{pmatrix}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}, C_\theta^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^p \theta^{2p+1} \\ (-1)^{p+1} \theta^{2p+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp(C_\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Posons, pour $n \geq 3$, $A_\theta = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. On a $A_\theta \neq A_{\theta+2\pi}$, cependant $\exp(A_\theta) = \exp(A_{\theta+2\pi})$, donc l'application $A \mapsto \exp(A)$ n'est pas injective.

(b) On a $\exp(A) - I_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = A(I_n + S_A)$ avec $S_A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!}$. Par continuité $\lim_{A \rightarrow 0} S_A = 0$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\|A\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_A\| \leq 1$.

(c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + T)X = 0$ ou encore $TX = -X$. Si $X \neq 0$, alors $\frac{\|TX\|}{\|X\|} = 1$ et donc $\|T\| \geq 1$, ce qui est absurde, d'où $X = 0$.

(d) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\| \leq \alpha$ et $\exp(M) = I_n$. Donc $\exp(M) - I_n = M(I_n + S_M) = 0$, mais $\|M\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_M\| < 1$, donc $I + S_M$ est inversible et par conséquent $M = 0$.

5. (a) g_k est une fonction polynômiale en x , donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout entier $n \geq 1$ et pour toutes matrices M et N , nous avons

$$M^n - N^n = \sum_{i=0}^{n-1} (N^i M^{n-i} - N^{i+1} M^{n-i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} N^i (M - N) N^{n-i-1},$$

d'où nous déduisons, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{g_k(x+h) - g_k(x)}{h} = \sum_{i=0}^{k-1} (B + xH)^i H (B + (x+h)H)^{k-i-1}.$$

Le second membre il a une limite finie quand h tend vers 0, donc g_k est dérivable en x et

$$g'_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} (B + xH)^i H (B + xH)^{k-i-1}.$$

En particulier, $g'_1(x) = H$, $g'_2(x) = H(B + xH) + (B + xH)H$ et

$$g'_3(x) = H(B + xH)^2 + (B + xH)H(B + xH) + (BH + xH)^2 H.$$

(b) D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \|g'_k(x)\| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|(B + xH)^i H (B + xH)^{k-i-1}\| \\ &\leq \|H\| \sum_{i=0}^{k-1} (\|B\| + x\|H\|)^i (\|B\| + x\|H\|)^{k-i-1} \\ &= k\|H\|(\|B\| + x\|H\|)^{k-1} \end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements finis, appliqué à g_k sur $[0, 1]$, entraîne $\|g_k(1) - g_k(0)\| \leq \sup_{x \in [0, 1]} \|g'_k(x)\|$, inégalité qui s'écrit encore

$$\|(B + H)^k - B^k\| \leq k\|H\|(\|B\| + \|H\|)^{k-1}.$$

6. (a) On a $T(A, x) = \frac{1}{x^2}(\exp(xA) - I_n - xA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{A^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k A^{k+2}}{(k+2)!}$ qui est la somme d'une série normalement convergente sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ ($a > 0$), et comme les termes de cette série sont bien définis en 0, alors l'application $x \mapsto T(A, x)$ se prolonge par continuité en 0, en posant $T(A, 0) = \frac{A^2}{2}$. La formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral, appliquée à la fonction f_A s'écrit :

$$\exp(xA) = I_n + xA + \frac{x^2 A^2}{2} \int_0^1 (1-t) \exp(txA) dt.$$

D'où $T(A, x) = \frac{A^2}{2} \int_0^1 (1-t) \exp(txA) dt$ et donc $\|T(A, x)\| \leq \frac{1}{2} \|A\|^2 \exp(x\|A\|)$.

(b) On a

$$\exp\left(\frac{1}{k}A\right) - \frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right) = I_n + \frac{1}{k}A$$

et

$$\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right)^k = \exp A$$

D'où

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp A = \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right) - \frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right)^k - \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right)^k.$$

La formule de la question 5.(b) donne, avec $B = \exp\left(\frac{1}{k}A\right)$ et $H = -\frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right)$:

$$\begin{aligned} \left\|\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp A\right\| &\leq \frac{1}{k} \left\|T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right\| \left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right) + \frac{1}{k^2} \left\|T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right\|\right]^{k-1} \\ &\leq \frac{1}{2k} \|A\|^2 \exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right) \left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right) + \frac{1}{2k^2} \|A\|^2 \exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\right]^{k-1} \\ &\leq \frac{1}{2k} \|A\|^2 \exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right) \exp\left(\frac{k-1}{k}\|A\|\right) \left[1 + \frac{1}{2k^2} \|A\|^2\right]^{k-1} \\ &\leq \frac{1}{2k} \|A\|^2 \exp(\|A\|) \left[1 + \frac{1}{2k^2} \|A\|^2\right]^{k-1} \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2k^2} \|A\|^2\right]^{k-1} = 1$, d'où $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \exp(A)$.¹

(c) Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A . Alors $\det = \det_{\mathcal{B}} \circ l$ où $l(A) = (C_1, C_2, \dots, C_n)$, donc $\det$ est continue, comme composée d'applications continues (l linéaire et $\det_{\mathcal{B}}$ n -linéaire en dimension finie).

On sait que le polynôme caractéristique de A s'écrit

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \operatorname{tr}(A),$$

donc si $x \neq 0$, $\det(I_n + xA) = (-x)^n \chi_A\left(\frac{-1}{x}\right) = 1 + \operatorname{tr}(A)x + o(x)$, en particulier :

$$\det\left(I_n + \frac{1}{k}A\right) = 1 + \frac{\operatorname{tr}(A)}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Par continuité de $\det$, on a donc :

$$\det \exp(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\operatorname{tr}(A)}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k = \exp(\operatorname{tr}(A)).$$

1. REMARQUE : On a

$$\exp(A) - \left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i - \sum_{i=0}^k \frac{\mathbb{G}_k^i}{k^i} A^i$$

Or $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{\mathbb{G}_k^i}{k^i} = \frac{k}{k} \frac{k-1}{k} \dots \frac{k-i+1}{k} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{i!},$$

donc

$$\left\|\exp(A) - \left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k\right\| \leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{i!} - \frac{\mathbb{G}_k^i}{k^i}\right) \|A\|^i + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{i!} = \exp(\|A\|) - \left(1 + \frac{\|A\|}{k}\right)^k.$$

Le second terme tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \exp(A)$.

7. (a) En remplaçant A et B dans l'égalité $\exp(xM) = I_n + xM + x^2T(M, x)$, on obtient :

$$U(A, B, x) = T(A, x) + T(B, x) + AB + x[AT(B, x) + T(A, x)B] + x^2T(A, x)T(B, x)$$

et, en passant à la limite lorsque x tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(A, B, x) = \lim_{x \rightarrow 0} T(A, x) + \lim_{x \rightarrow 0} T(B, x) + AB = \frac{1}{2}(A^2 + B^2) + AB.$$

De plus, comme $x > 0$,

$$\begin{aligned} \|U(A, B, x)\| &\leq \frac{1}{2}\|A\|^2 \exp(x\|A\|) + \frac{1}{2}\|B\|^2 \exp(x\|B\|) + \|A\|\|B\| \\ &\quad + \frac{x}{2}\|A\|\|B\|(\|B\| \exp(x\|A\|) + \|A\| \exp(x\|B\|)) \\ &\quad + \frac{x^2}{4}\|A\|^2\|B\|^2 \exp(x(\|A\| + \|B\|)). \end{aligned}$$

- (b) On a

$$P_k = \left[I_n + \frac{1}{k}(A + B) + \frac{1}{k^2}U\left(A, B, \frac{1}{k}\right) \right]^k - \left[I_n + \frac{1}{k}(A + B) \right]^k$$

et, appliquant l'inégalité du I.5.b. on obtient

$$\|P_k\| \leq \frac{1}{k} \left\| U\left(A, B, \frac{1}{k}\right) \right\| \left[1 + \frac{1}{k}(\|A\| + \|B\|) + \frac{1}{k^2} \left\| U\left(A, B, \frac{1}{k}\right) \right\| \right]^{k-1}.$$

Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = 0$.

- (c) On a alors immédiatement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right) \exp\left(\frac{1}{k}B\right) \right]^k = \exp(A + B).$$

Partie II

Groupes à un paramètre

1. On sait déjà que f_A est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (I.3.a.). Comme pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, xA et yA commutent, on a :

$$f_A(x + y) = \exp(xA + yA) = \exp(xA) \cdot \exp(yA) = f_A(x) \cdot f_A(y).$$

Il suffit de prouver que $f_A(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ pour conclure. Or $f_A(0) = I_n$ et $f_A(x) \cdot f_A(-x) = I_n$ ce qui prouve que $f_A(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}$. f_A est bien un morphisme continu du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc $f_A(\mathbb{R})$ est un groupe à un paramètre.

2. On sait que $\mathcal{O}_+(2) = \left\{ r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$. Si on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors le I.4. nous permet d'affirmer que $f_A(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_+(2)$ et donc $\mathcal{O}_+(2)$ est un groupe à un paramètre.

3. On pose $h_\alpha(t) = \begin{cases} (t^2 - \alpha^2)^2 & \text{si } |t| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } |t| > \alpha \end{cases}$. Il est clair que cette fonction est positive et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On

pose $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} h_\alpha(t) dt$. La fonction $g_\alpha = \frac{h_\alpha}{I}$ vérifie bien les conditions de la question.

Les fonctions g_α et g'_α sont continues sur $[-\alpha, \alpha]$ donc uniformément continues sur cet intervalle. Comme elles sont nulles en dehors de cet intervalle, elles sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$.

4. (a) On a $[t - \alpha, t + \alpha] \subset [-t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et $g_\alpha(t - u) = 0$ pour $u \in [-t_0 - \alpha, t - \alpha] \cup [t + \alpha, t_0 + \alpha]$ donc

$$\psi(t) = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g_\alpha(t-u)\Phi(u)du = \int_{-t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} g_\alpha(t-u)\Phi(u)du.$$

(b) En développant l'expression polynomiale de g_α , on arrive à une expression du genre

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^4 t^k \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \Phi_k(u) du$$

où les fonctions Φ_k sont continues. Ceci permet d'affirmer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Si on change u en $t - u$ dans la dernière intégrale, on obtient

$$\psi(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u) \Phi(t - u) du$$

et comme $\Phi(t - u) = \Phi(t)\Phi(-u) = \Phi(-u + t) = \Phi(-u)\Phi(t)$ on en déduit

$$\psi(t) = M_\alpha \cdot \Phi(t) = \Phi(t) \cdot M_\alpha.$$

5. (a) Vu que $\Phi(0) = I_n$ et que $\int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u) du = 1$ alors

$$M_\alpha - I_n = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u) [\Phi(-u) - \Phi(0)] du.$$

Comme Φ est continue en 0, on sait que $\sup_{u \in [-\alpha, \alpha]} \|\Phi(u) - \Phi(0)\| = \varepsilon(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers 0. A l'aide de l'inégalité de la norme, on obtient

$$\|M_\alpha - I_n\| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u) \|\Phi(-u) - \Phi(0)\| du \leq \varepsilon(\alpha)$$

et donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0} M_\alpha = I_n$.

(b) Comme $\lim_{\alpha \rightarrow 0} M_\alpha = I_n$, il existe $\beta > 0$ tel que $0 < \alpha < \beta$ entraîne $\|M_\alpha - I_n\| < 1$ et, en écrivant $M_\alpha = I_n + (M_\alpha - I_n)$ et en utilisant le résultat du I.4.c., on en déduit que M_α est inversible pour $\alpha \in]0, \beta[$.

(c) Pour $\alpha \in]0, \beta[$, $\Phi(t) = (M_\alpha)^{-1} \psi(t)$ donc Φ est continûment dérivable.

6. (a) On dérive par rapport à u la relation $\Phi(t + u) = \Phi(t) \cdot \Phi(u)$ (Φ est de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient

$$\Phi'(t + u) = \Phi(t) \Phi'(u)$$

et, avec $u = 0$,

$$\Phi'(t) = \Phi(t) \Phi'(0) = \Phi'(0) \Phi(t) = \Phi(t) A = A \Phi(t).$$

(b) Ω est de classe $\mathcal{C}^1$, $\Omega(0) = I_n$. Or

$$\Omega'(t) = \Phi'(t) \exp(-tA) - \Phi(t) A \exp(-tA) = 0$$

donc Ω est constante et $\Phi(t) = \exp(tA)$.

Partie III

Algèbre de Lie

1. Vérification immédiate.

2. Il suffit de vérifier que E et F sont stables par la loi $[\cdot, \cdot]$. En effet, si $A, B \in E$ alors $\text{tr}[A, B] = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0$. De même, si $A, B \in F$ on a ${}^t[A, B] = {}^t(AB) - {}^t(BA) = {}^tB^tA - {}^tA^tB = BA - AB = -[A, B]$.

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{I_n}(x) = e^x I_n$. Comme G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et $e^x \neq 0$, alors $e^x I_n \in G$. Donc g contient la matrice I_n .

- (b) Soit $A, B \in g$. Il est clair que $\lambda A \in g$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc il suffit de montrer que $A + B \in g$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x(A + B)) \in G$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $A, B \in g$, alors $\exp\left(\frac{tA}{k}\right)$ et $\exp\left(\frac{tB}{k}\right)$ appartiennent à G , et comme

G est un groupe, il contient aussi le produit $\left(\exp\left(\frac{tA}{k}\right)\exp\left(\frac{tB}{k}\right)\right)^k$ et comme G est fermé dans $GL_n(\mathbb{R})$ il

contient aussi $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{tA}{k}\right)\exp\left(\frac{tB}{k}\right)\right)^k$ qui vaut $\exp(x(A + B))$ (d'après la question).

- (c) Il suffit de montrer que $[A, B] \in g$ pour tout A, B de g . Comme $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$, il suffit de montrer que $\exp(x[A, B]) \in g$ pour tout $x \geq 0$, soit donc $t \in \mathbb{R}$ fixé tel que $x = t^2$, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{tA}{k}\right)\exp\left(\frac{tB}{k}\right)\right) \left(\exp\left(-\frac{tA}{k}\right)\exp\left(-\frac{tB}{k}\right)\right)^{k^2} = \exp(x[A, B])$$

Comme $A, B \in g$, alors G contient le terme de gauche pour tout k , et comme G est fermé il contient aussi la limite $\exp(x[A, B])$. Ceci montre que $[A, B] \in g$.

4. L'application déterminant, noté $\det$, est un morphisme de groupe de $(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ dans $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. Le noyau étant $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} = \det^{-1}\{1\}$, c'est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\det$ est une application continue, alors $\det^{-1}\{1\}$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Déterminons l'algèbre de Lie de g . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_A(x) = \exp xA \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exp(xA)\exp(x^tA) = I_n \Leftrightarrow x(A + {}^tA) = 0 \Leftrightarrow A + {}^tA = 0.$$

Ainsi la matrice A est antisymétrique. D'où $g = F$.

5. Soit A une matrice antisymétrique réelle et $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$A + {}^tA = 0 \Leftrightarrow xA + {}^txA = 0 \Leftrightarrow \exp(xA){}^t\exp(xA) = I_n \Leftrightarrow \exp(xA) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

où $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = I_n\}$ désigne le groupe orthogonal. Ainsi, $g = \{A \in F \mid f_A(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$.

• • • • •